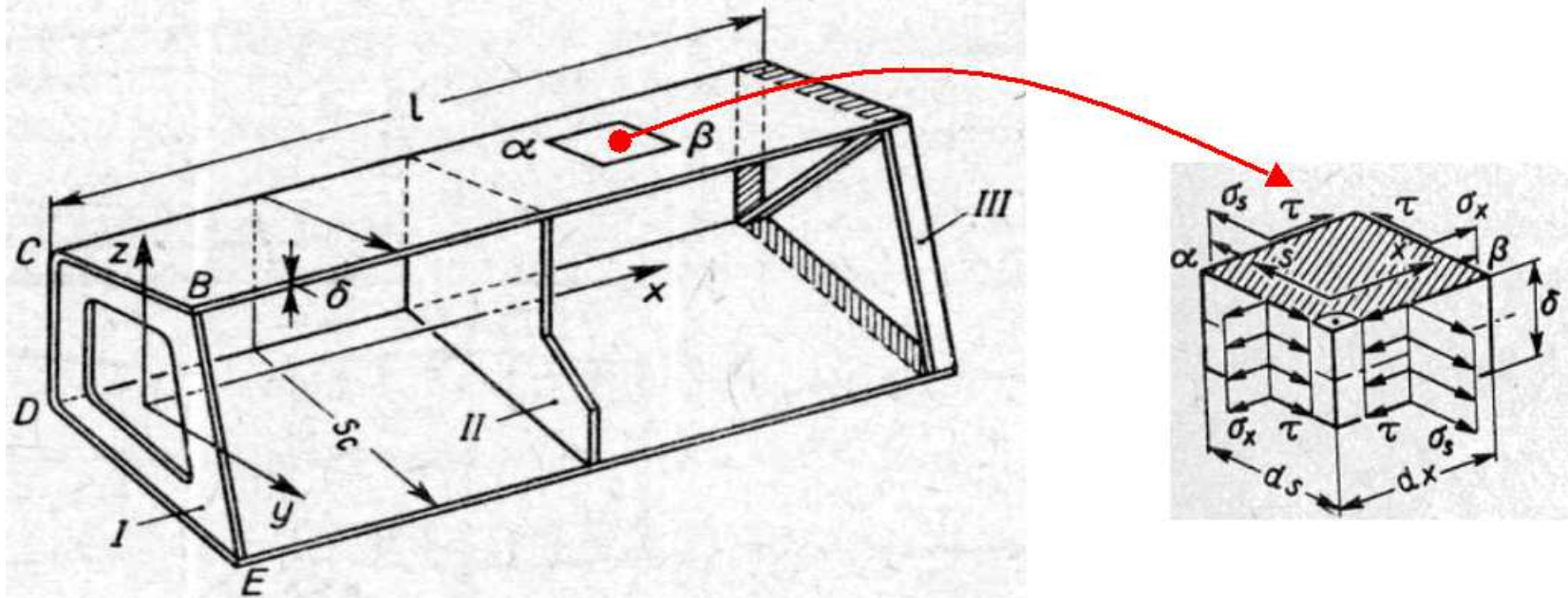


Wykład 13. PRĘTY CIENKOŚCIENNE

1.1. Wprowadzenie

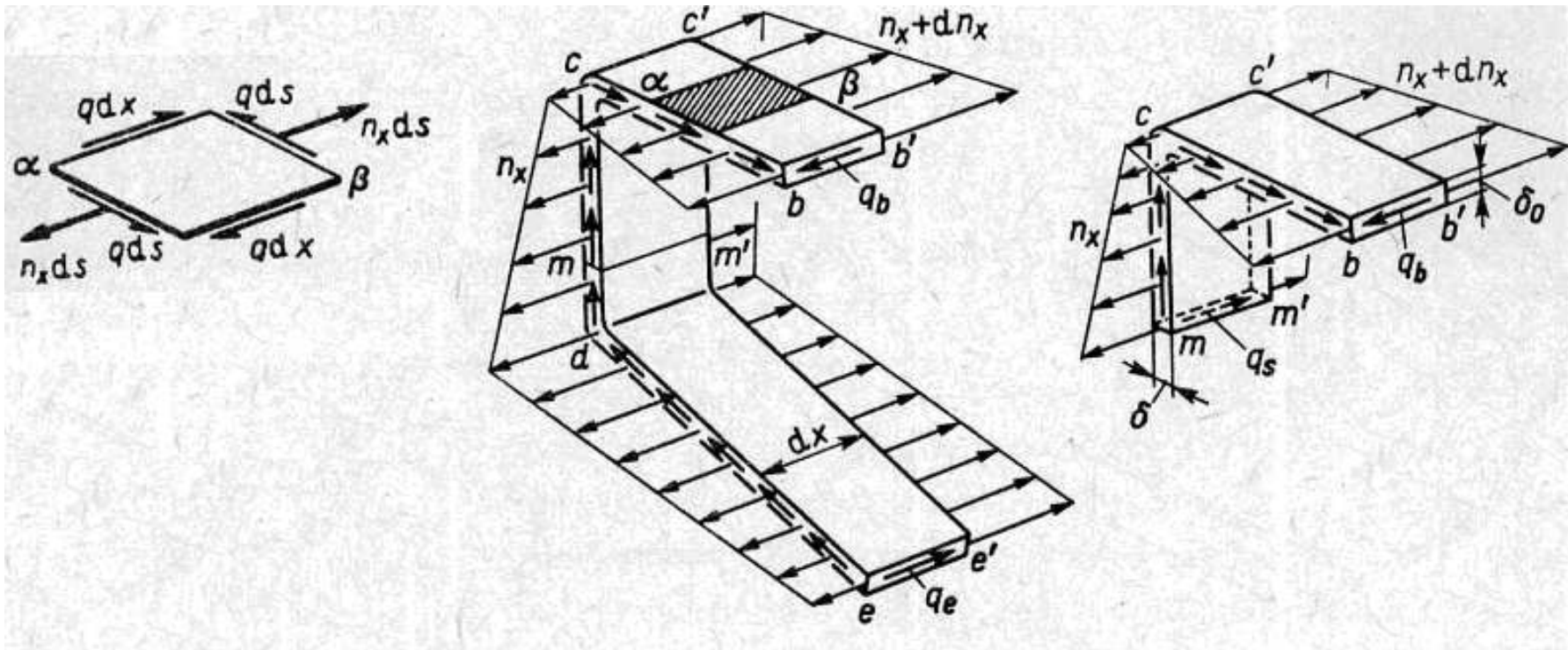
- Typowy pręt składa się z pryzmatycznego **plaszcza** o tworzących równoległych do osi pręta i **żeber** poprzecznych do tej osi. Pręt spełnia warunek: $\delta \ll s_c \ll l$.
- Żebra cechuje bardzo duża sztywność w ich płaszczyźnie i duża wiotkość w kierunku prostopadłym do tej płaszczyzny.
- Pręty mogą być: otwarte i zamknięte (rury jedno- i wieloobwodowe).



- W płaszczu powstają naprężenia **równoległe do środkowej powierzchni płaszcza i równe wzdłuż grubości δ** .
- Naprężenia σ_s w kierunku poprzecznym są pomijalne w porównaniu z σ_x i τ .

- Można wyrazić te naprężenia przez wydatki:

$$n_x = \sigma_x \cdot \delta, \quad q = \tau \cdot \delta \quad (13.1)$$



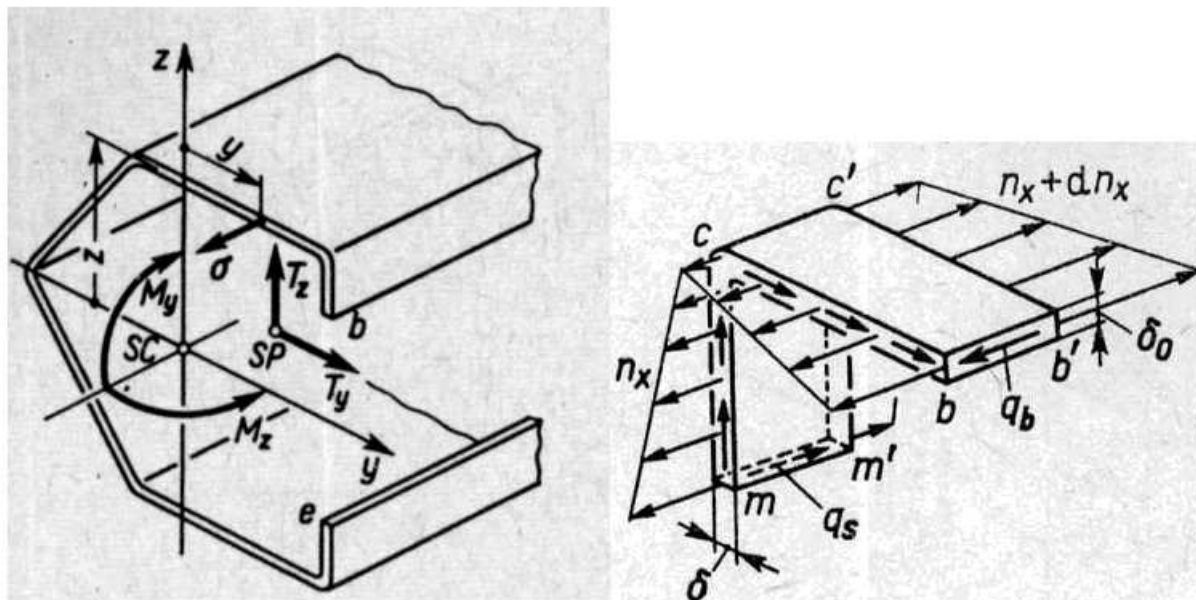
- Wydatki n_x i q są od siebie zależne:

$$q_s dx - q_b dx + \int dn_x ds = 0 \quad (13.2)$$

$$q_s = q_b - \int_s \frac{dn_x}{dx} ds$$

Zbadajmy przypadek, gdy pręt o przekroju otwartym ulega zgięciu poprzecznemu:

$$n_x = \sigma_x \delta = -\frac{M_y z \delta}{J_y} - \frac{M_z y \delta}{J_z}. \quad (13.3)$$



Wstawiając (13.3) do (13.2) i uwzględniając, że na krawędzi swobodnej **b** jest $q_b=0$ mamy:

$$q_s = -\int_0^s \left(-\frac{dM_y}{dx} z \delta \right) ds - \int_0^s \left(-\frac{dM_z}{dx} y \delta \right) ds = \frac{T_z S_y^{(s)}}{J_y} + \frac{T_y S_z^{(s)}}{J_z}, \quad (13.4a)$$

z wzoru (5.2) mamy $dM_y/dx = T_z$, $dM_z/dx = T_y$, a całki

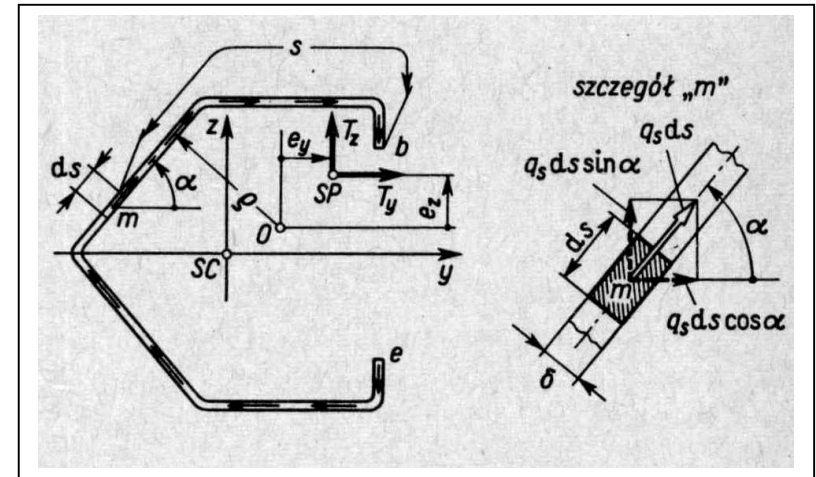
$$S_y^{(s)} = \int_0^s z \delta ds, \quad S_z^{(s)} = \int_0^s y \delta ds \quad (13.4b)$$

Spełnione są warunki:

$$a) T_z = \int_0^{s_c} q_s \sin \alpha ds$$

$$b) T_y = \int_0^{s_c} q_s \cos \alpha ds$$

$$c) \int_0^{s_c} q_s ds \varrho = \frac{T_y}{J_z} \int_0^{s_c} S_z^{(s)} \varrho ds + \frac{T_z}{J_y} \int_0^{s_c} S_y^{(s)} \varrho ds = T_y e_z - T_z e_y$$

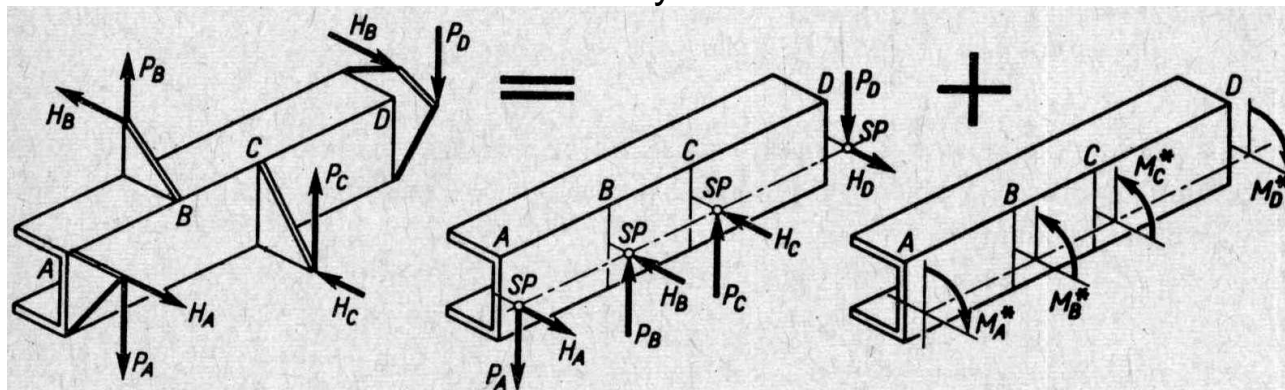


Przy poprzecznym zginaniu pręta o przekroju otwartym siła poprzeczna o składowych T_y i T_z musi przechodzić przez pewien szczególny punkt SP przekroju, tzw. **środek sił poprzecznych**, którego współrzędne względem punktu O są e_y i e_z .

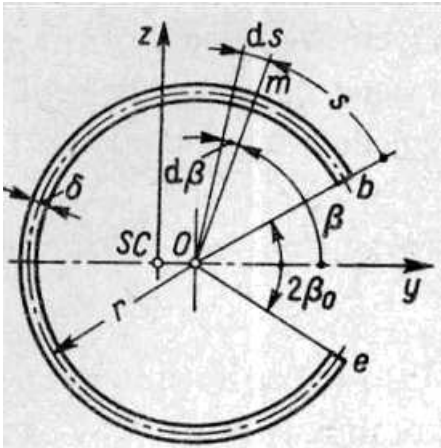
Podstawiając kolejno: $T_y=0$ i $T_z \neq 0$ oraz $T_z=0$ i $T_y \neq 0$, mamy wzory:

$$e_y = -\frac{1}{J_y} \int_0^{s_c} S_y^{(s)} \varrho ds, \quad e_z = \frac{1}{J_z} \int_0^{s_c} S_z^{(s)} \varrho ds. \quad (13.5)$$

Ogólne obciążenie można zatem rozbić na dwa stany:



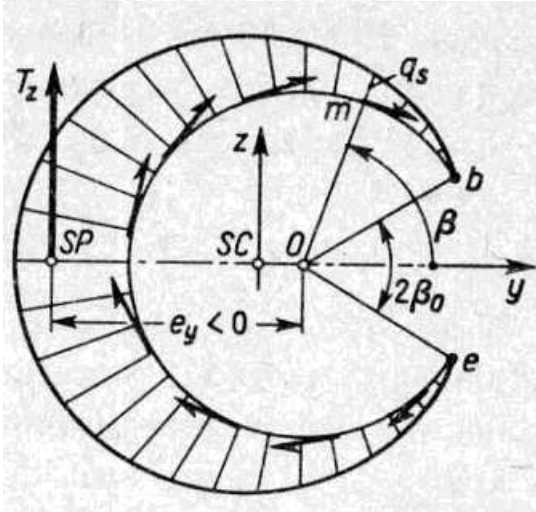
Przykład 1



$$J_y = \int_{\beta_0}^{2\pi - \beta_0} (\delta r d\beta) (r \sin \beta)^2 = \left[(\pi - \beta_0) + \frac{\sin 2\beta_0}{2} \right] r^3 \delta$$

mamy tu $T_y = 0$, a moment statyczny dla części bm

$$S_y^{(s)} = \int_{\beta_0}^{\beta} (\delta r d\beta) (r \sin \beta) = r^2 \delta (\cos \beta_0 - \cos \beta),$$



$$q_s = \frac{T_z S_y^{(s)}}{J_y} = \frac{T_z r^2 \delta}{J_y} (\cos \beta_0 - \cos \beta).$$

$$\int_{\beta_0}^{2\pi - \beta_0} -q_s r d\beta \cos \beta = \frac{T_z r^3 \delta}{J_y} \int_{\beta_0}^{2\pi - \beta_0} (\cos \beta - \cos \beta_0) \cos \beta d\beta = \frac{T_z r^3 \delta}{J_y} \left(\pi - \beta_0 + \frac{\sin 2\beta_0}{2} \right)$$

Stąd:

$$e_y = -\frac{1}{J_y} \int_{\beta_0}^{2\pi - \beta_0} r^2 \delta (\cos \beta_0 - \cos \beta) r \cdot r d\beta = -4r \frac{(\pi - \beta_0) \cos \beta_0 + \sin \beta_0}{2(\pi - \beta_0) + \sin 2\beta_0}.$$

Przykład 2:

Określić rozkład q_s w profilu, gdy $T_z = 10 \text{ kN}$.

$$J_y \approx \frac{\delta}{12} [2h^3 - (h-2h_1)^3] + \frac{bh^2\delta}{2} = 199,3 \text{ cm}^4$$

dla punktu $m_1 \rightarrow S_y^{(s)} = s_1 \delta (h+s_1-2h_1)/2$,

gdy $s_1 = h_1$,

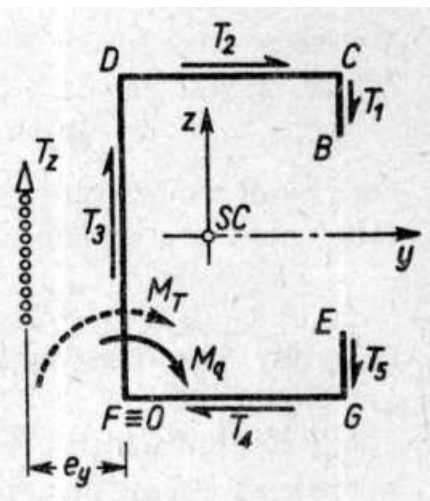
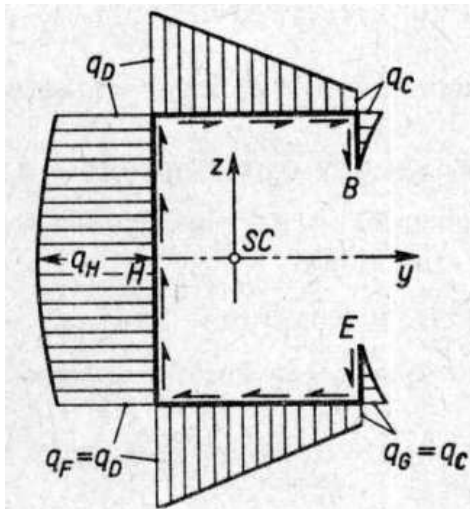
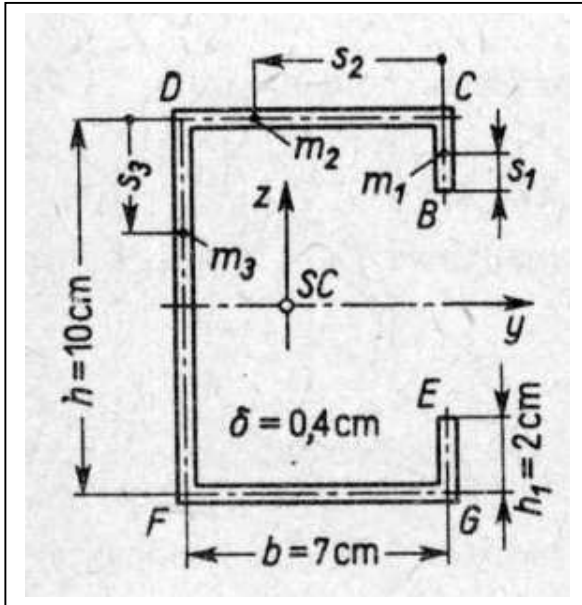
$$q_c = T_z(h-h_1) h_1 \delta / 2J_y = 10^4 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 \cdot 10^{-2} / 2 \cdot 199,3 \cdot 10^{-8} = 16 \text{ kN/m}.$$

dla punktu m_2 moment $S_y^{(s)}$ jest $\rightarrow S_y^{(s)} = 0,5 (h-h_1) h_1 \delta + (s_2 \delta h / 2)$,

dla $s_2 = b$, $q_D = T_z[(h-h_1) h_1 \delta + b h \delta] / 2J_y = 86,4 \text{ kN/m}$.

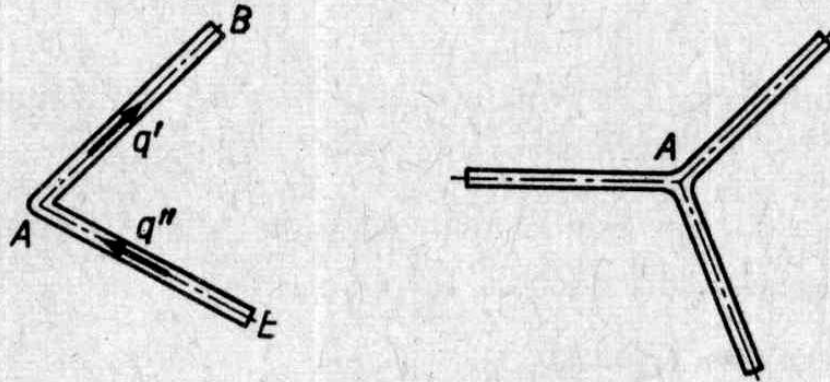
Dla punktu m_3 wreszcie mamy $S_y^{(s)} \rightarrow S_y^{(s)} = [(h-h_1) h_1 \delta / 2] + (bh\delta / 2) + [s_3 \delta (h-s_3) / 2]$,

dla $s_3 = h/2$ jest $q_H = 111,2 \text{ kN/m}$.

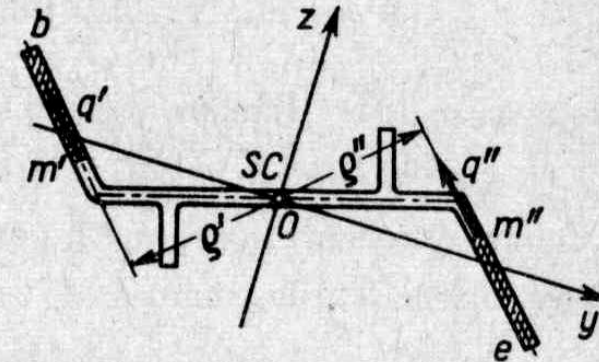


Przykład 3.

6. W profilach (rys. 13.8) ścianki są płaskie i schodzą się w węźle A (rys. 13.8). Udowodnić, że węzeł ten jest środkiem sił poprzecznych.



Rys. 13.8.



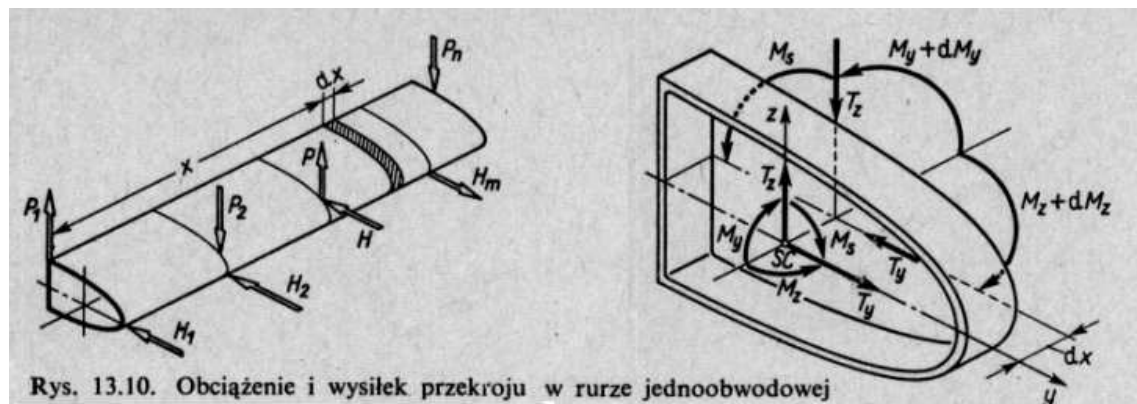
Rys. 13.9.

Rozwiązanie. Wypadkowa wydatków q' w ścianie AB działa wzdłuż linii AB , podobnie wypadkowa z q'' działa wzdłuż AE . Ich łączna wypadkowa, równa sile tnącej, przechodzi więc *zawsze* przez punkt A , który wobec tego jest środkiem sił poprzecznych.

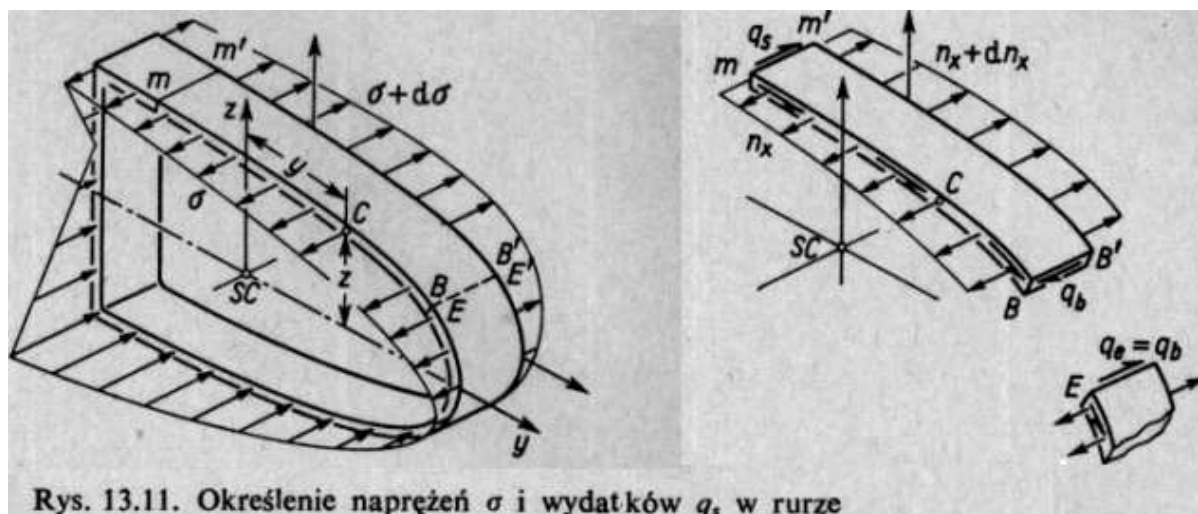
7. Udowodnić, że w profilu punktowo-symetrycznym (rys. 13.9) środki: ciężkości SC i sił poprzecznych SP pokrywają się.

Rozwiązanie. Dla symetrycznie położonych punktów m' i m'' wydatki q' i q'' oraz promienie q' i q'' są równe. Ponieważ momenty $q' q' ds$ i $q'' q'' ds$ znoszą się i całki we wzorach (13.5) też są równe zeru, a więc $e_y = e_z = 0$.

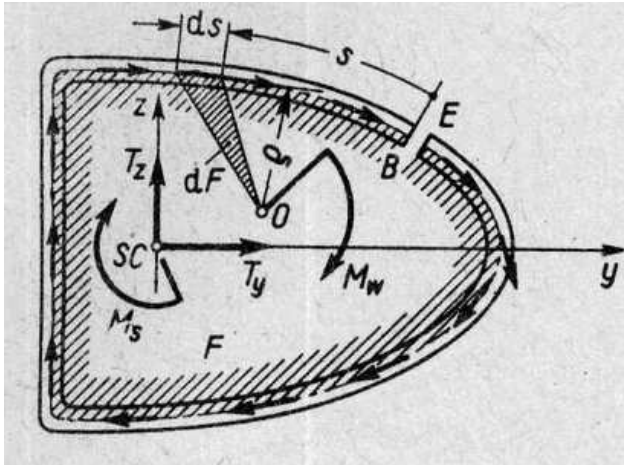
1.2. Rury jednoobwodowe



Aby określić wydatki q_s , wprowadźmy dodatkowe przecięcie BB' badanego plasterka rury



Rury jednoobwodowe (c.d.)



Wobec tego

$$q_s = q_b + \frac{T_z S_y^{(s)}}{J_y} + \frac{T_y S_z^{(s)}}{J_z}, \quad (13.6a)$$

gdzie $S_y^{(s)}, S_z^{(s)}$ — momenty statyczne pola przekroju odcinka Bm .

Nie znany na razie wydatek q_b wyznaczamy z warunku równowagi⁽¹⁾ sumy elementarnych momentów $q_s ds$ względem dowolnie obranego punktu O i momentu M_w , jaki względem tegoż punktu dają siły T_z, T_y i moment M_s (rys. 13.12), czyli

$$M_w = \int_0^{s_c} q_s \rho ds = q_b \int_0^{s_c} \rho ds + \frac{T_z}{J_y} \int_0^{s_c} S_y^{(s)} \rho ds + \frac{T_y}{J_z} \int_0^{s_c} S_z^{(s)} \rho ds. \quad (a)$$

Zauważając, że $\rho ds = 2 dF$, a suma takich składników jest podwojonym polem F ograniczonym środkową linią konturu mamy

$$q_b = \frac{M_w}{2F} - \frac{1}{2F} \left[\frac{T_z}{J_y} \int_0^{s_c} S_y^{(s)} \rho ds + \frac{T_y}{J_z} \int_0^{s_c} S_z^{(s)} \rho ds \right]. \quad (13.7a)$$

całkowity wydatek styczny

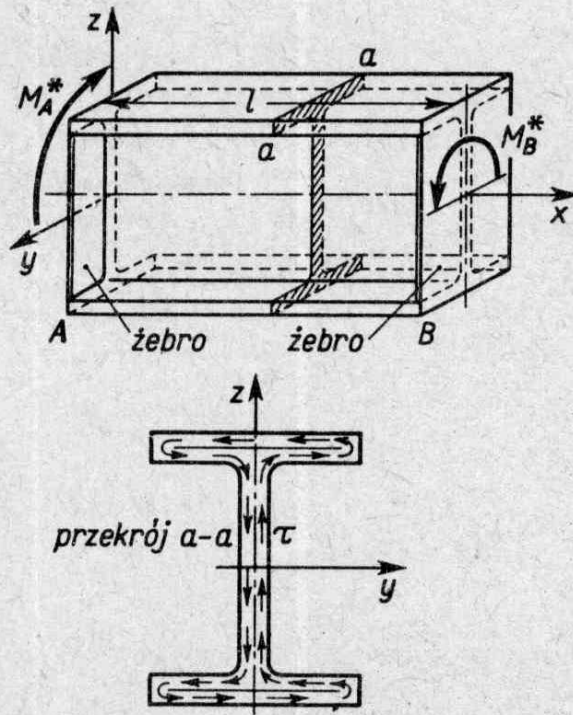
$$q_s = q_b + q'. \quad (13.6b)$$

Zgodnie z ogólną regułą wyznaczania przemieszczeń szukany kąt θ jest równy liczbowo sumie prac we wszystkich elementach badanego jednostkowego plasterka, czyli

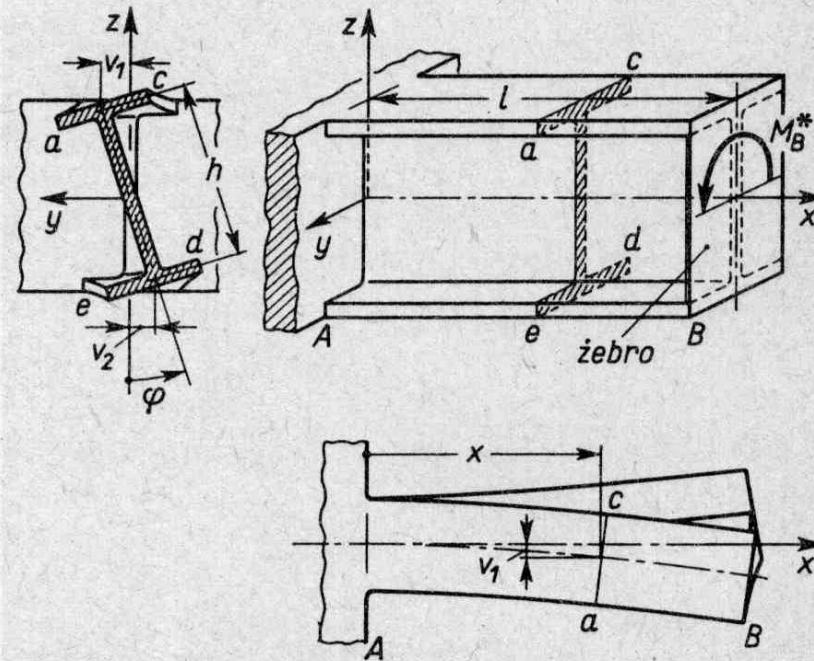
$$\theta = \frac{1}{2GF} \int_0^{s_c} \frac{q_s ds}{\delta}.$$

1.3. Nieswobodne skręcanie profilu dwuteowego

Omawiając pracę profilu otwartego (art. 13.1) wydzielono jako osobne zagadnienie skręcania. Powodem jest to, że przy skręcaniu tych profili obraz odkształceń i naprężeń zależy bardzo od sposobu podparcia pręta. Jeśli mianowicie momenty skręcające przyłożone są tylko na *swobodnych* końcach pręta (rys. 13.18), to ten przypadek tzw. *swobodnego*



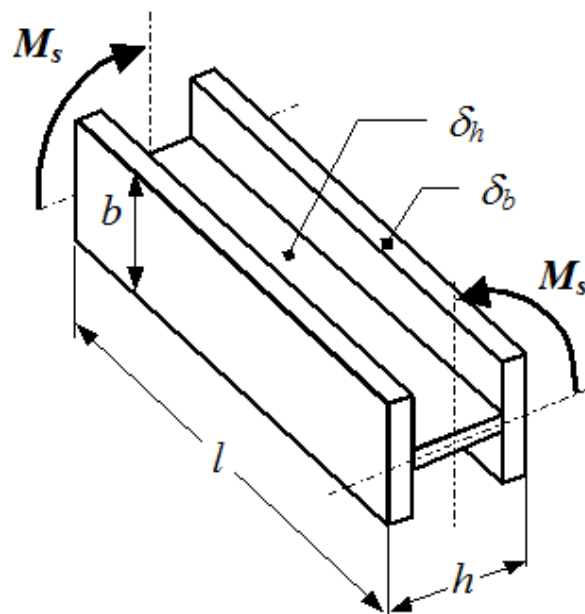
Rys. 13.18. Skręcanie swobodne



Rys. 13.19. Nieswobodne skręcanie dwuteówki

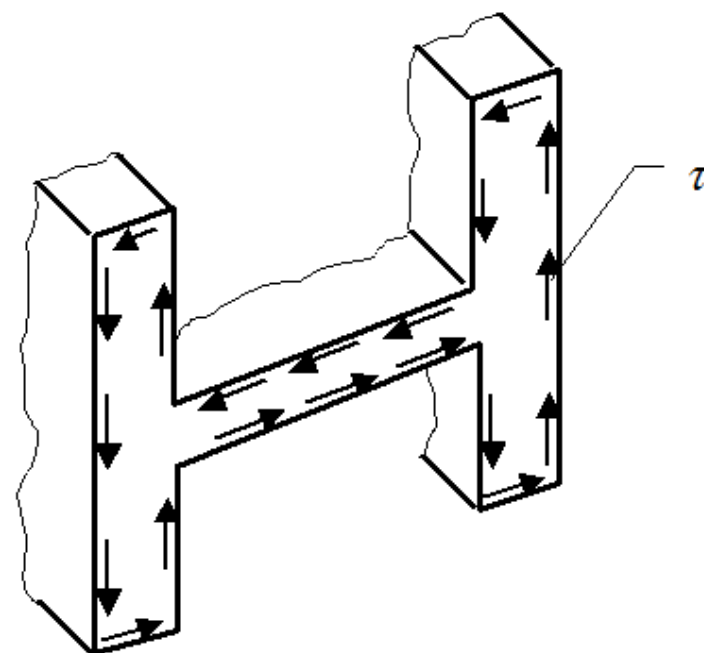
A. SKRĘCANIE SWOBODNE

Podst. cecha fizyczna – przekrój poprzeczny przestaje być płaski (deplanacja)



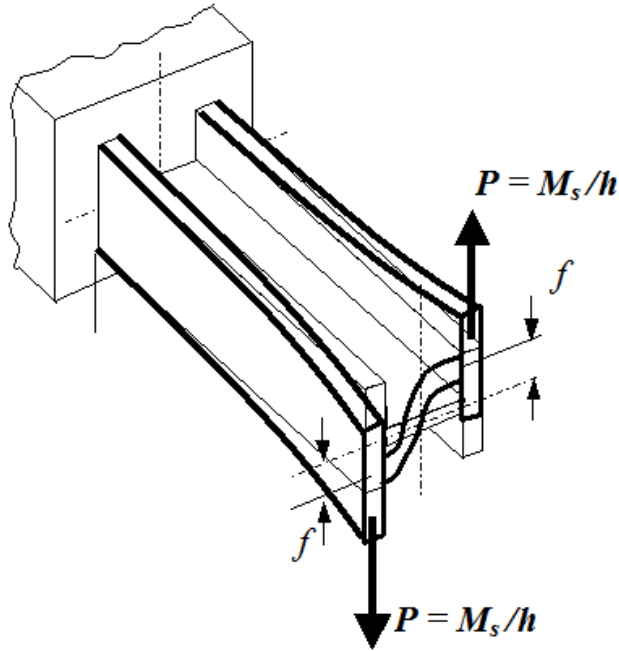
Kąt skręcenia swobodnego: $\varphi_{sw} = \frac{M_s l}{C}$

$$C = GJ_s = G \sum \left(\frac{s \delta^3}{3} \right)_i = G \frac{2b\delta_b^3 + h\delta_h^3}{3}$$



B. SKRĘCANIE NIESWOBODNE

Podst. cecha fizyczna – przynajmniej jeden przekrój ma ograniczona lub w ogóle usunięta swobodę deplacji



Zmiana mechanizmu pracy!
Są to niejako dwie belki połączone żebrem.

Ugięcie belki (z WK):

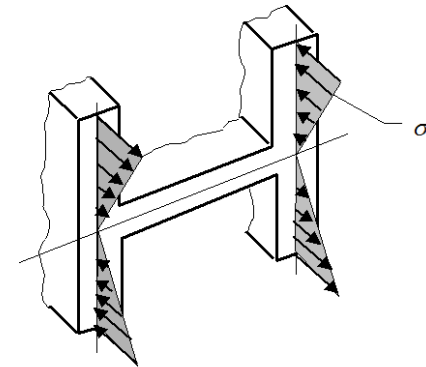
$$f = \frac{Pl^3}{3EJ_y} = \frac{M_s}{h} \frac{l^3}{3E(b^3\delta_b/12)}$$

Kąt skręcenia:

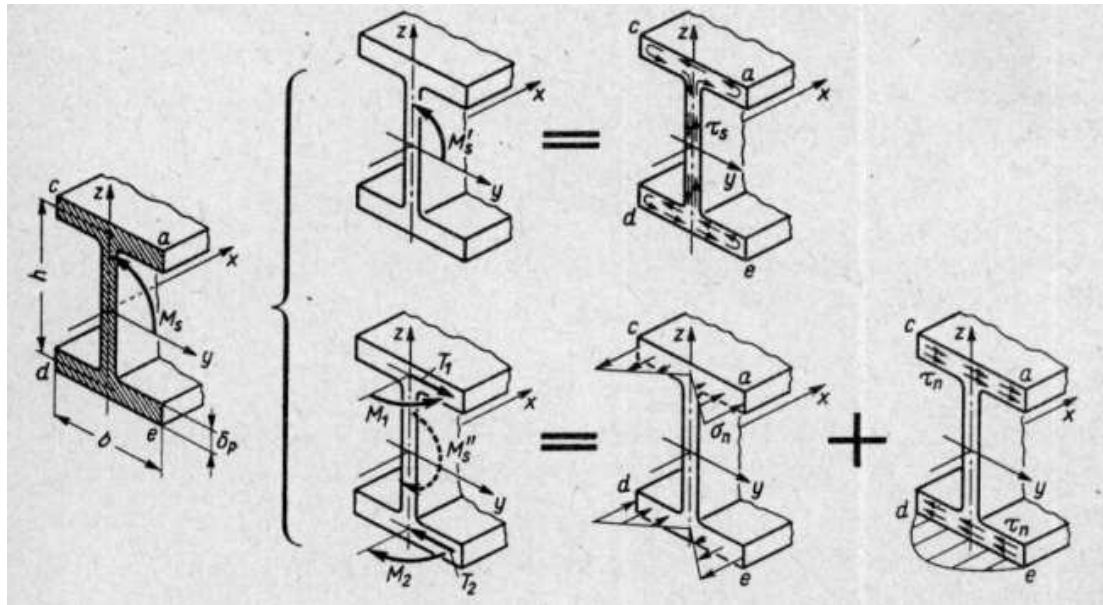
$$\varphi_{ns} = \frac{2f}{h} = \frac{8M_s l^3}{Eh^2 b^3 \delta_b}$$

$$\frac{\varphi_{sw}}{\varphi_{ns}} = \frac{3M_s l}{G(2b\delta_b^3 + h\delta_h)} \frac{Eh^2 b^3 \delta_b}{8M_s l^3} = \frac{3E}{8G} \left(\frac{bh}{l\delta_b} \right)^2 \left(2 + \frac{h}{b} \left(\frac{\delta_h}{\delta_b} \right)^3 \right)^{-1}$$

dla $E/G=2.6$, $b=100$, $h=200$, $l=200$, $\delta_b=\delta_h=5$ \rightarrow $\frac{\varphi_{sw}}{\varphi_{ns}} = 24$



Podwójny mechanizm pracy na skręcanie profilu otwartego



$$M'_s = GJ_s \theta = C\theta = C d\varphi/dx,$$

$$M''_s = -T_1 h = -\frac{EJh^2}{2} \frac{d^2\theta}{dx^2} = -C_s \frac{d^2\theta}{dx^2},$$

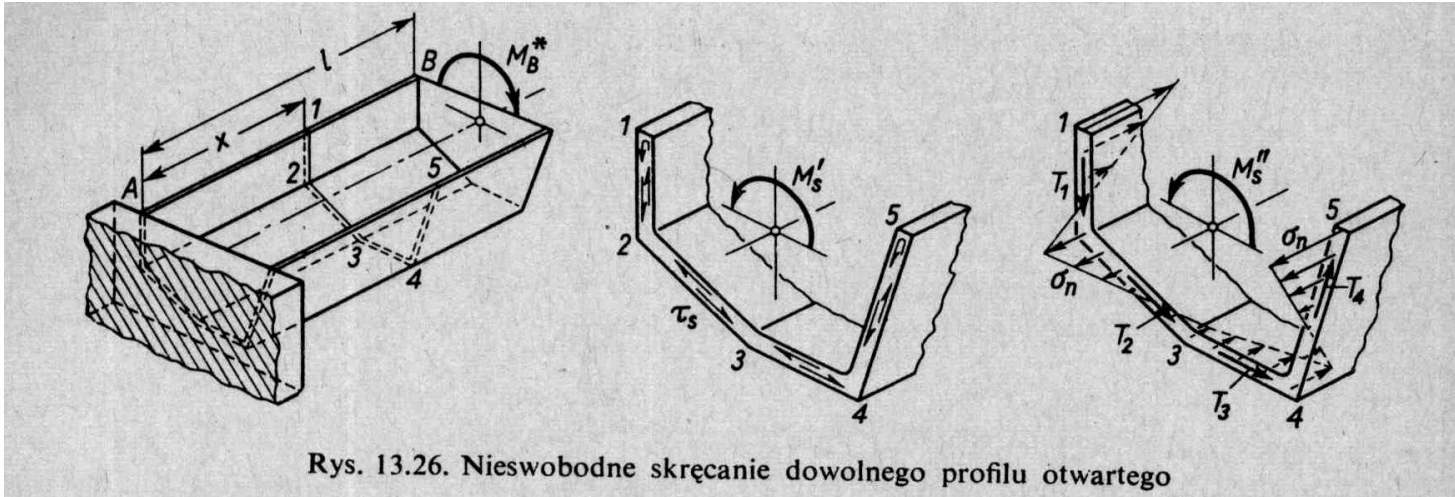
gdzie C_s — tzw. sztywność na nieswobodne skręcanie

$$C_s = \frac{EJh^2}{2} = \frac{Eb^3 h^2 \delta_p}{24} \text{ Nm}^4.$$

Całkowity moment M_s w badanym przekroju jest sumą M'_s i M''_s , wobec czego z wzorów (b) i (13.9) mamy równanie

$$-C_s \frac{d^2\theta}{dx^2} + C\theta = M_s, \quad (13.11)$$

1.4. Nieswobodne skręcanie innych profili otwartych



Rys. 13.26. Nieswobodne skręcanie dowolnego profilu otwartego

a) obrót przekrojów zachodzi względem osi wzdłużnej łączącej środki sił poprzecznych (SP) przekrojów;

b) naprężenia normalne σ_n są proporcjonalne do $d\theta/dx$ i określone są zależnością

$$\sigma_n = \kappa E F_u (d\theta/dx), \quad (13.13)$$

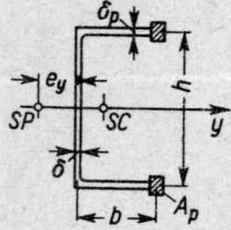
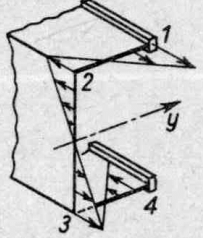
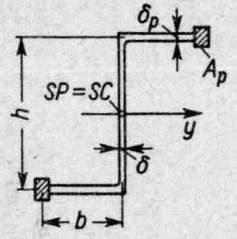
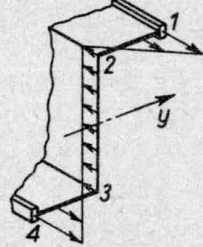
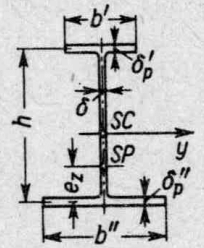
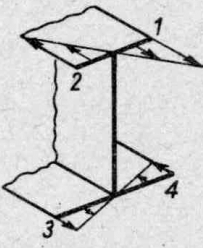

gdzie E — moduł Younga, F_u — umownie określone pole, a κ — bezwymiarowy współczynnik zależny od kształtu przekroju i położenia badanego na tym przekroju punktu;

c) moment M_s'' przenoszony przez siły tnące T jest proporcjonalny do $d^2\theta/dx^2 \doteq d^3\varphi/dx^3$, czyli

$$M_s'' = -C_s (d^2\theta/dx^2) = -C_s (d^3\varphi/dx^3), \quad (13.14)$$

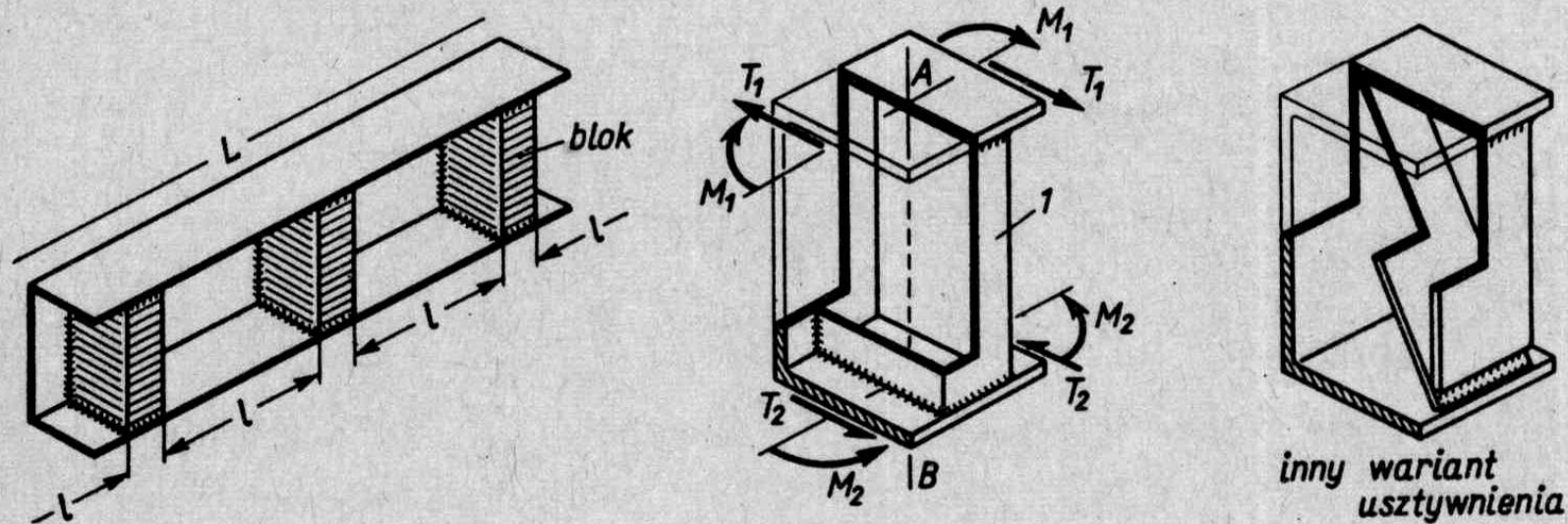
gdzie $C_s \text{ Nm}^4$ — sztywność nieswobodnego skręcania jest zależna od kształtu przekroju i proporcjonalna do modułu E .

Parametry nieswobodnego skręcania niektórych profili

Nr	Typ profilu	Polożenie SP	Obraz i wartość σ_n	Sztywność C_s
1		$e_y = \frac{b(1+2\psi)}{2(1+\psi+\eta)}$ $\psi = \frac{A_p}{b\delta_p}$ $\eta = \frac{h\delta}{6b\delta_p}$	 $\kappa_1 = \frac{1+2\eta}{4(1+\psi+\eta)}$ $\kappa_2 = -\frac{1+2\psi}{4(1+\psi+\eta)}$ $\kappa_3 = -\kappa_2, \kappa_4 = -\kappa_1, F_u = bh$	$C_s = \frac{2Eb^3h^2\delta_p}{3} \times$ $\times [\kappa_1^2(1+3\psi) + \kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2(1+3\eta)]$
2		$SP \equiv SC$ $\psi = \frac{A_p}{b\delta_p}$ $\eta = \frac{h\delta}{6b\delta_p}$	 $\kappa_1 = \frac{1+6\eta}{4(1+\psi+3\eta)}$ $\kappa_2 = -\frac{1+2\psi}{4(1+\psi+3\eta)}$ $\kappa_3 = \kappa_2, \kappa_4 = \kappa_1, F_u = bh$	$C_s = \frac{2Eb^3h^2\delta_p}{3} \times$ $\times [\kappa_1^2(1+3\psi) + \kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2(1+9\eta)]$
3		$e_z = \frac{h}{1+\psi}$ $\psi = \left(\frac{b''}{b'}\right)^3 \left(\frac{\delta_p''}{\delta_p'}\right)$	 $\kappa_1 = -\kappa_2 = \frac{\psi}{2(1+\psi)}$ $\kappa_3 = -\kappa_4 = \frac{1}{2(1+\psi)} \frac{b''}{b'}$ $F_u = b'h$	$C_s = \frac{Eb'^3h^2\delta_p'\psi}{12(1+\psi)}$
4			<p>Przy dowolnych wymiarach, grubości, liczbie i ustawieniu ścianek płaskich zawsze</p> $\sigma_n \equiv 0, C_s \equiv 0$	

Usztywnianie profilu otwartego

Efektywną metodą zwiększenia sztywności, a jednocześnie zmniejszenia σ_n w skręcanym profilu otwartym, w którym $C_s \neq 0$, jest skrócenie jego długości l . Zrealizowanie tego osiągamy wstawiając w krótkich odstępach elementy l (rys. 13.27), które wespół z zasadni-

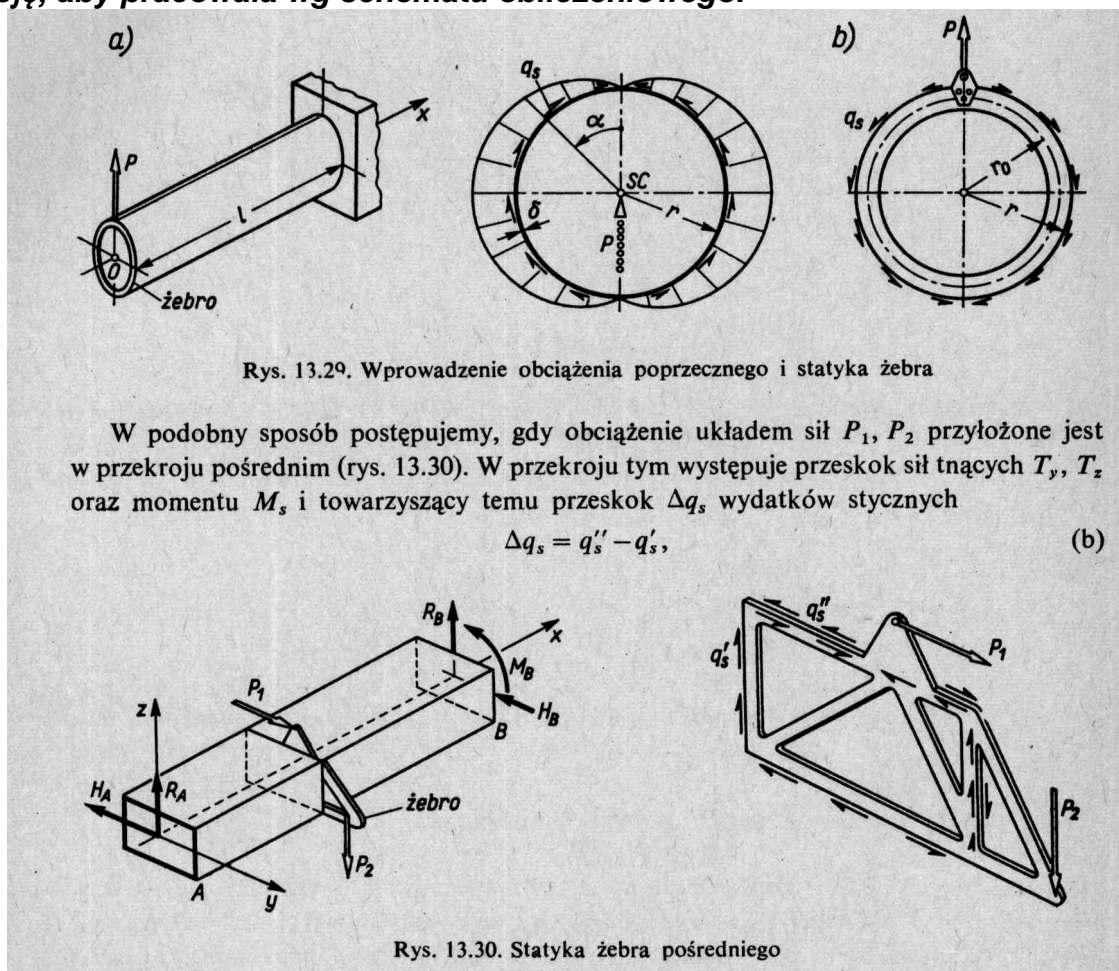


Rys. 13.27. Usztywnienie profilu otwartego

czym profilem przekształcają te części pręta w bloki usuwające swobodę spaczenia w tych miejscach⁽¹⁾. W wyniku zamiast pierwotnego pręta o długości L , mamy szereg krótkich prętów l , których stan jest identyczny z rozpatrzonym w zadaniu 3 art. 13.3. Podobny efekt uzyskujemy dając zamiast elementu l dwa płaskowniki, tak jak podaje rysunek.

1.5. Uwagi ogólne o pracy prętów cienkościennych

Musimy „zmusić” konstrukcję, aby pracowała wg schematu obliczeniowego.

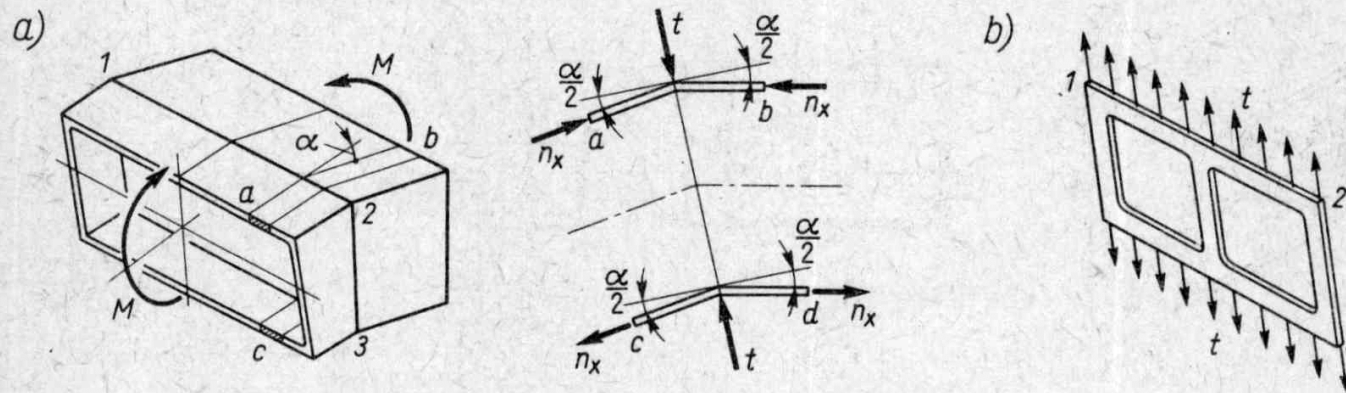


W celu prawidłowego wprowadzenia obciążenia poprzecznego w pręcie cienkościennym trzeba zastosować mocne pojedyncze żebro.

Załomy

Innymi miejscami wymagającymi wzmocnienia są, nieuniknione w praktyce, załomy płaszcz (rys. 13.31a). Wywołane zginaniem takiego skrzynekowego pręta wydatki normalne n_x doznają raptownej zmiany kierunku w przekroju załomu 1, 2, 3. Aby zachować równowagę jednostkowego paska ab , należy w załomie dodać obciążenie ciągłe

$$t = 2n_x \sin(\alpha/2) \approx n_x \alpha \quad (c)$$



Rys. 13.31. Statyka żebra w załomie płaszczu